Anwendung Behufs des Studiums physiologischer und pathologischer Vorgänge möglich geworden sein wird.

Über die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile.

Von **Prof. Dr. Kirchhoff** zu Breslau.

St. Venant hat in seinem *Mémoire sur l'équilibre des corps solides .... Compt. rend. XXIV, pag. 260*, einen Weg angedeutet, auf welchem man zu den Gleichungen gelangen kann, die die Bedingungen des Gleichgewichtes für einen elastischen Körper in dem Falle ausdrücken, dass die Verschiebungen, die seine Theile durch äussere Kräfte erlitten haben, nicht unendlich klein sind; einem Falle, der bei einem Körper, bei dem eine Dimension unendlich klein ist, vorkommen kann, ohne dass die Grenze der vollkommenen Elasticität überschritten wird. Diese Gleichungen habe ich auf zwei verschiedenen Wegen abgeleitet, von denen der erste im Wesentlichen mit dem von St. Venant angedeuteten übereinzukommen scheint, der zweite auf der Entwickelung einer früher von mir (Crelle's Journ. XL) aufgestellten Formel beruht.

Ich will als abhängige Variable nicht, wie es sonst üblich ist, die Verschiebungen eines Punktes einführen, sondern die Coordinaten desselben nach der Formänderung selbst; durch Einführung der Verschiebungen gewinnt man nichts, wenn diese nicht unendlich klein sind, im Gegentheil verlieren dadurch die Formeln an Kürze und Übersichtlichkeit. Ich werde die Coordinaten eines Punktes nach der Formänderung ξ, η, ζ nennen, die Coordinaten desselben Punktes vor derselben, x, y, z. Im natürlichen Zustande des Körpers denke ich mir durch den Punkt (x, y, z) drei Ebenen gelegt, parallel den Coordinaten-Ebenen; die Theile dieser Ebenen, welche unendlich nahe an dem genannten Punkte liegen, gehen bei der Formänderung in Ebenen über, die mit den Coordinaten-Ebenen schiefe, endliche Winkel bilden, mit einander aber Winkel, die unendlich wenig von 90^0 verschieden sind. Die Drucke, die diese Ebenen nach der Formänderung auszuhalten haben, denke ich mir in Componenten

nach den Coordinaten-Axen zerlegt, und nenne diese Componenten: X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z, in der Art, dass z. B. Y_x die y Componente des Druckes ist, den die Ebene auszuhalten hat, die von der Formänderung senkrecht zur x Axe war. Diese neun Drucke sind im Allgemeinen schief gegen die Ebenen gerichtet, gegen die sie wirken, und es sind nicht drei von ihnen dreien anderen gleich, wie es bei unendlich kleinen Verschiebungen der Fall ist. Stellt man die Bedingungen dafür auf, dass ein Theil des Körpers sich im Gleichgewichte befindet, der vor der Formänderung ein unendlich kleines Parallelepipedum ist, dessen Kanten parallel den Coordinaten-Axen sind, und die Längen dx, dy, dz haben, so kommt man zu den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \rho X &= \frac{\partial x_x}{\partial x} + \frac{\partial x_y}{\partial y} + \frac{\partial x_z}{\partial z} \\ \rho Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ \rho Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad 1)$$

wenn man mit ρ die Dichtigkeit des Körpers, mit X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden Kraft bezeichnet, die auf den Körper im Punkte (ξ, η, ζ) wirkt. Man kommt zu diesen Gleichungen, indem man benützt, dass die Winkel und die Kanten des Parallelepipedums sich nur unendlich wenig geändert haben, übrigens aber dieselben Betrachtungen anstellt, durch die man bei unendlich kleinen Verschiebungen diese Gleichungen beweist. Stellt man ferner die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Theiles des Körpers auf, der vor der Formänderung eine unendlich kleine Pyramide war, deren drei Seitenflächen parallel waren den Coordinaten-Ebenen, und deren Grundfläche senkrecht stand auf einer Linie s, die mit den Axen die Winkel (s, x), (s, y), (s, z) bildet, und nennt man dabei X_s, Y_s, Z_s die nach den Coordinaten-Axen genommenen Componenten des Druckes, den die Grundfläche nach der Formänderung zu erleiden hat, so findet man, wenn man wieder berücksichtigt, dass die Pyramide unendlich wenig ihre Gestalt geändert hat

$$\left.\begin{aligned} X_s &= X_x \cos(s, x) + X_y \cos(s, y) + X_z \cos(s, z) \\ Y_s &= Y_x \cos(s, x) + Y_y \cos(s, y) + Y_z \cos(s, z) \\ Z_s &= Z_x \cos(s, x) + Z_y \cos(s, y) + Z_z \cos(s, z) \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Hieraus folgt, dass, wenn n die Normale eines Elementes der Oberfläche des Körpers in seinem ursprünglichen Zustande ist, und (X), (Y), (Z) die Componenten des Druckes sind, die dieses Element nach der Formänderung von aussen her zu erleiden hat, folgende Gleichungen bestehen müssen:

$$\left.\begin{aligned} (X) &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \\ (Y) &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \\ (Z) &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z) \end{aligned}\right\} \quad 3).$$

Wir müssen jetzt für die Drucke X_x, X_y etc. Ausdrücke durch $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ etc. suchen, und diese in die Differentialgleichungen 1) und die Grenzbedingungen 3) substituiren. Zu diesen Ausdrücken gelangen wir leicht durch Betrachtung der Hauptdrucke und der Hauptdilatationen. Der Zustand jedes unendlich kleinen Theiles des Körpers nach der Formänderung kann aus dem Zustande desselben vor dieser als auf die Weise hervorgegangen angesehen werden, dass der Theil eine Verschiebung, eine Drehung und endlich in drei auf einander rechtwinkligen Richtungen Dilatationen erlitten hat. Diese Dilatationen sind die Hauptdilatationen; ihre Richtungen müssen mit denen der Hauptdrucke zusammenfallen, d. h. derjenigen Drucke, welche senkrecht wirken; denn eine Ebene, die senkrecht auf einer von ihnen ist, hat nothwendigerweise einen senkrechten Druck zu erleiden, vorausgesetzt, dass die Structur des Körpers nach allen Richtungen dieselbe ist. Es sei σ eine unendlich kleine Linie, die in einer dieser drei Richtungen gezogen ist, s die Linie im ursprünglichen Zustande des Körpers, die bei der Formänderung in σ übergeht, P der eine Hauptdruck, nämlich der Druck, der gegen die auf σ senkrechte Ebene ausgeübt wird; dann haben, da P in der Richtung von σ wirkt, die Componenten von P, X_s, Y_s, Z_s, folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} X_s &= P \cos(\sigma, x) \\ Y_s &= P \cos(\sigma, y) \\ Z_s &= P \cos(\sigma, z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 4).$$

Die Grössen $\cos(\sigma, x)$, $\cos(\sigma, y)$, $\cos(\sigma, z)$ lassen sich ausdrücken durch $\cos(s, x)$, $\cos(s, y)$, $\cos(s, z)$; sind nämlich (x, y, z) und $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ zwei Punkte der Linie s,

so sind (ξ, η, ζ) und $(\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta)$ zwei Punkte der Linie σ; dabei haben wir:

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz,$$
$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz,$$
$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz.$$

Setzen wir $dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^2$ und $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \varepsilon_2$; so haben wir ferner:

$$dx = e \cos(s, x), \quad dy = e \cos(s, y), \quad dz = e \cos(s, z),$$
$$d\xi = e \cos(\sigma, x), \quad d\eta = e \cos(\sigma, y), \quad d\zeta = e \cos(\sigma, z).$$

Daraus folgt, wenn wir berücksichtigen, dass ε von e nur unendlich wenig verschieden ist:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\sigma, x) &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial \xi}{\partial z} \cos(s, z) \\
\cos(\sigma, y) &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cos(s, z) \\
\cos(\sigma, z) &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cos(s, z)
\end{aligned}\right\} 5).$$

Da diese Gleichungen gelten, wenn s eine beliebige Linie ist, so erkennt man aus ihnen leicht die geometrische Bedeutung der neun Differentialquotienten $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}$ etc. Nimmt man nämlich s parallel mit der x Axe an, so sieht man, dass $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ die *cos.* der Winkel sind, welche nach der Formänderung eine unendlich kleine Linie mit den Axen bildet, die im ursprünglichen Zustande der x Axe parallel war; entsprechend ist die Bedeutung von $\frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ und $\frac{\partial \xi}{\partial z}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \zeta}{\partial z}$.

Substituirt man die Werthe von $\cos(\sigma, x)$, $\cos(\sigma, y)$, $\cos(\sigma, z)$, aus 5) in die Gleichungen 4) und verbindet mit diesen die Gleichungen 2), so erhält man, wenn man $\cos(s, x) = a$, $\cos(s, y) = b$, $\cos(s, z) = c$ setzt:

$$\left.\begin{aligned}
X_x a + X_y b + X_z c &= P\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} a + \frac{\partial \xi}{\partial y} b + \frac{\partial \xi}{\partial z} c\right) \\
Y_x a + Y_y b + Y_z c &= P\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} a + \frac{\partial \eta}{\partial y} b + \frac{\partial \eta}{\partial z} c\right) \\
Z_x a + Z_y b + Z_z c &= P\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} a + \frac{\partial \zeta}{\partial y} b + \frac{\partial \zeta}{\partial z} c\right)
\end{aligned}\right\} 6).$$

Ich will die drei Hauptdrucke P_1, P_2, P_3 nennen, und den Grössen a, b, c die Indices 1, 2, 3 geben, je nachdem sie sich auf den einen oder den andern derselben beziehen; diese Gleichungen gelten dann, wenn man den Grössen P, a, b, c gleichzeitig den Index 1, oder 2, oder 3 gibt. Die drei durch die Grössen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, bestimmten Richtungen stehen aufeinander senkrecht, zwischen ihnen bestehen also die bekannten, für diesen Fall geltenden Relationen. Mit Hülfe dieser Relationen kann man aus dem Systeme 6) X_x, X_y etc. durch P_1, P_2, P_3 a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, ausdrücken. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen:

$$X_x a_1 + X_y b_1 + X_z c_1 = P_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} a_1 + \frac{\partial \xi}{\partial y} b_1 + \frac{\partial \xi}{\partial z} c_1\right)$$

$$X_x a_2 + X_y b_2 + X_z c_2 = P_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} a_2 + \frac{\partial \xi}{\partial y} b_2 + \frac{\partial \xi}{\partial z} c_2\right)$$

$$X_x a_3 + X_y b_3 + X_z c_3 = P_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} a_3 + \frac{\partial \xi}{\partial y} b_3 + \frac{\partial \xi}{\partial z} c_3\right)$$

einmal mit a_1, a_2, a_3, dann mit b_1, b_2, b_3, dann mit c_1, c_2, c_3, und addirt sie jedesmal, so erhält man:

$$\begin{aligned}
X_x = & \frac{\partial \xi}{\partial x} (P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2 + P_3 a_3^2) \\
& + \frac{\partial \xi}{\partial y} (P_1 a_1 b_1 + P_2 a_2 b_2 + P_3 a_3 b_3) \\
& + \frac{\partial \xi}{\partial z} (P_1 a_1 c_1 + P_2 a_2 c_2 + P_3 a_3 c_3) \\
X_y = & \frac{\partial \xi}{\partial x} (P_1 a_1 b_1 + P_2 a_2 b_2 + P_3 a_3 b_3) \\
& + \frac{\partial \xi}{\partial y} (P_1 b_1^2 + P_2 b_2^2 + P_3 b_3^2) \\
& + \frac{\partial \xi}{\partial z} (P_1 b_1 c_1 + P_2 b_2 c_2 + P_3 b_3 c_3) \\
X_z = & \frac{\partial \xi}{\partial x} (P_1 a_1 c_1 + P_2 a_2 c_2 + P_3 a_3 c_3) \\
& + \frac{\partial \xi}{\partial y} (P_1 b_1 c_1 + P_2 b_2 c_2 + P_3 b_3 c_3) \\
& + \frac{\partial \xi}{\partial z} (P_1 c_1^2 + P_2 c_2^2 + P^3 c_3^2).
\end{aligned}$$

Setzt man:

$$\left.\begin{array}{l} P_1\, a_1^2 + P_2\, a_2^2 + P_3\, a_3^2 = (aa) \\ P_1\, b_1^2 + P_2\, b_2^2 + P_3\, b_3^2 = (bb) \\ P_1\, c_1^2 + P_2\, c_2^2 + P_3\, c_3^2 = (cc) \\ P_1\, b_1\, c_1 + P_2\, b_2\, c_2 + P_3\, b_3\, c_3 = (bc) \\ P_1\, c_1\, a_1 + P_2\, c_2\, a_2 + P_3\, c_3\, a_3 = (ac) \\ P_1\, a_1\, b_1 + P_2\, a_2\, b_2 + P_3\, a_3\, b_3 = (ab) \end{array}\right\} \ldots 7),$$

so gehen diese Gleichungen und die entsprechenden, die man aus der zweiten und dritten Gleichung des Systemes 6) erhält, in die folgenden über:

$$\left.\begin{array}{l} X_x = \frac{\partial\xi}{\partial x}(aa) + \frac{\partial\xi}{\partial y}(ab) + \frac{\partial\xi}{\partial z}(ac)\,, \\ X_y = \frac{\partial\xi}{\partial x}(ab) + \frac{\partial\xi}{\partial y}(bb) + \frac{\partial\xi}{\partial z}(bc)\,, \\ X = \frac{\partial\xi}{\partial x}(ac) + \frac{\partial\xi}{\partial y}(bc) + \frac{\partial\xi}{\partial z}(cc)\,, \\ Y_x = \frac{\partial\eta}{\partial x}(aa) + \frac{\partial\eta}{\partial y}(ab) + \frac{\partial\eta}{\partial z}(ac)\,, \\ Y_y = \frac{\partial\eta}{\partial x}(ab) + \frac{\partial\eta}{\partial y}(bb) + \frac{\partial\eta}{\partial z}(bc)\,, \\ Y_z = \frac{\partial\eta}{\partial x}(ac) + \frac{\partial\eta}{\partial y}(bc) + \frac{\partial\eta}{\partial z}(cc)\,, \\ Z_x = \frac{\partial\zeta}{\partial x}(aa) + \frac{\partial\zeta}{\partial y}(ab) + \frac{\partial\zeta}{\partial z}(ac)\,, \\ Z_y = \frac{\partial\zeta}{\partial x}(ab) + \frac{\partial\zeta}{\partial y}(bb) + \frac{\partial\zeta}{\partial z}(bc)\,, \\ Z_z = \frac{\partial\zeta}{\partial x}(ac) + \frac{\partial\zeta}{\partial y}(bc) + \frac{\partial\zeta}{\partial z}(cc)\,, \end{array}\right\} \ldots 8).$$

Bezeichnen wir die Werthe der Hauptdilatationen durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so werden P_1, P_2, P_3 Functionen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sein; nehmen wir diese als linear an, so können wir setzen:

$$\begin{array}{l} P_1 = -2K\left(\lambda_1 + \theta\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\right) \\ P_2 = -2K\left(\lambda_2 + \theta\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\right) \\ P_3 = -2K\left(\lambda_3 + \theta\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\right) \end{array}$$

Hierdurch verwandeln sich die Gleichungen 7) in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
(aa) &= -2K\Big(\lambda_1 a_1{}^2 + \lambda_2 a_2{}^2 + \lambda_3 a_3{}^2 + \theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Big)\\
(bb) &= -2K\Big(\lambda_1 b_1{}^2 + \lambda_2 b_2{}^2 + \lambda_3 b_3{}^2 + \theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Big)\\
(cc) &= -2K\Big(\lambda_1 c_1{}^2 + \lambda_2 c_2{}^2 + \lambda_3 c_3{}^2 + \theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Big)\\
(bc) &= -2K\Big(\lambda_1 b_1 c_1 + \lambda_2 b_2 c_2 + \lambda_3 b_3 c_3\Big)\\
(ac) &= -2K\Big(\lambda_1 c_1 a_1 + \lambda_2 c_2 a_2 + \lambda_3 c_3 a_3\Big)\\
(ab) &= -2K\Big(\lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 + \lambda_3 a_3 b_3\Big)
\end{aligned}\right\} \quad 9)$$

Nennen wir nun wieder e die Verbindungslinie der beiden Punkte (x, y, z) und $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ vor der Formänderung und ε die Entfernung derselben Punkte nach dieser, so ist die Dilatation λ, die die Linie e erfährt, $=\frac{\varepsilon}{e}-1$; berücksichtigen wir, dass λ unendlich klein ist, so können wir hierfür schreiben: $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^2}{e^2} - 1\right)$; in diese Gleichung hat man zu setzen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2\\
d\xi &= \frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy + \frac{\partial\xi}{\partial z}dz\\
d\eta &= \frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy + \frac{\partial\eta}{\partial z}dz\\
d\zeta &= \frac{\partial\zeta}{\partial x}dx + \frac{\partial\zeta}{\partial y}dy + \frac{\partial\zeta}{\partial z}dz.
\end{aligned}$$

Setzt man ausserdem: $\frac{dx}{e}=a$, $\frac{dy}{e}=b$, $\frac{dz}{e}=c$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\lambda = &\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 - 1\right)a^2\\
&+ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 - 1\right)b^2\\
&+ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2 - 1\right)c^2\\
&+ \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)bc\\
&+ \left(\frac{\partial\xi}{dz}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)ca\\
&+ \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)ab.
\end{aligned}$$

Wir wollen diese Gleichung folgendermassen schreiben:

$$\lambda = La^2 + Mb^2 + Nc^2 + 2lbc + 2mca + 2nab \quad . . . \quad 10)$$

indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 - 1\right)\\
M &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 - 1\right)\\
N &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2 - 1\right)\\
l &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\\
m &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\\
n &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \quad 11).$$

Suchen wir das Maximum und das Minimum von λ, so kommen wir auf die Werthe der Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3; die zugehörigen Werthe von a, b, c sind a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3. Um diese zu finden, haben wir also das folgende System von Gleichungen aufzulösen:

$$\left.\begin{aligned}
o &= (L-\lambda)\,a + nb + mc\\
o &= na + (M-\lambda)\,b + lc\\
o &= ma + lb + (N-\lambda)\,c\\
& a^2 + b^2 + c^2 = 1
\end{aligned}\right\} \quad . . . \quad 12).$$

Diese Gleichungen werden erfüllt, wenn man den Grössen λ, a, b, c gleichzeitig den Index 1, 2 oder 3 gibt; nehmen wir mit ihnen eine ähnliche Operation vor, wie wir sie mit dem Systeme 6) vorgenommen haben, so finden wir:

$$\begin{aligned}
L &= \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2\\
M &= \lambda_1 b_1^2 + \lambda_2 b_2^2 + \lambda_3 b_3^2\\
N &= \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \lambda_3 c_3^2\\
l &= \lambda_1 b_1 c_1 + \lambda_2 b_2 c_2 + \lambda_3 b_3 c_3\\
m &= \lambda_1 c_1 a_1 + \lambda_2 c_2 a_2 + \lambda_3 c_3 a_3\\
n &= \lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 + \lambda_3 a_3 b_3
\end{aligned}$$

$$L + M + N = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Hierdurch gehen die Gleichungen 9) in die folgenden über:

$$(aa) = -2K\Big(L + \theta(L+M+N)\Big); \quad (bc) = -2Kl$$
$$(bb) = -2K\Big(M + \theta(L+M+N)\Big); \quad (ac) = -2Km$$
$$(cc) = -2K\Big(N + \theta(L+M+N)\Big); \quad (ab) = -2Kn$$

und dadurch die Gleichungen 8) in diese:

$$X_x = -2K\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\big(L + \theta(L+M+N)\big) + \frac{\partial\xi}{\partial y}n + \frac{\partial\xi}{\partial z}m\right),$$
$$X_y = -2K\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}n + \frac{\partial\xi}{\partial y}\big(M + \theta(L+M+N)\big) + \frac{\partial\xi}{\partial z}l\right),$$
$$X_z = -2K\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}m + \frac{\partial\xi}{\partial y}l + \frac{\partial\xi}{\partial z}\big(N + \theta(L+M+N)\big)\right),$$
$$Y_x = -2K\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\big(L + \theta(L+M+N)\big) + \frac{\partial\eta}{\partial y}n + \frac{\partial\eta}{\partial z}m\right),$$
$$Y_y = -2K\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}n + \frac{\partial\eta}{\partial y}\big(M + \theta(L+M+N)\big) + \frac{\partial\eta}{\partial z}l\right),$$
$$Y_z = -2K\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}m + \frac{\partial\eta}{\partial y}l + \frac{\partial\eta}{\partial z}\big(N + \theta(L+M+N)\big)\right),$$
$$Z_x = -2K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\big(L + \theta(L+M+N)\big) + \frac{\partial\zeta}{\partial y}n + \frac{\partial\zeta}{\partial z}m\right),$$
$$Z_y = -2K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}n + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\big(M + \theta(L+M+N)\big) + \frac{\partial\zeta}{\partial z}l\right),$$
$$Z_z = -2K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}m + \frac{\partial\zeta}{\partial y}l + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\big(N + \theta(L+M+N)\big)\right).$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichungen 1) und 3), und setzt dabei für L, M, N, l, m, n ihre Werthe aus 11), so hat man die gesuchten Differentialgleichungen und Grenzbedingungen.

In meiner Abhandlung „über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe" habe ich die Gleichgewichtsbedingung für einen elastischen Körper, dessen Theile endliche Verschiebungen erfahren haben, in einer andern Form aufgestellt, aus der man aber durch eine verhältnissmässig einfache Rechnung die hier entwickelten Gleichungen finden kann. Ich will mir erlauben, auch diese Rechnung hierher zu setzen.

Jene Gleichgewichtsbedingung ist:

$$\left.\begin{aligned} &\delta P - K\delta\Omega = 0, \\ &\Omega = \int dV\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\right) \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

Hier bedeutet δP das Moment der äusseren Kräfte, die auf den Körper wirken; es ist also:

$$\delta P = \iiint dx\, dy\, dz\, \rho\, (X\, \delta\xi + Y\, \delta\eta + Z\, \delta\zeta) \\ + \int df\, ((X)\, \delta\xi + (Y)\, \delta\eta + (Z)\, \delta\zeta),$$

wo df ein Element der Oberfläche des Körpers bedeutet. dV ist das Element des Volumens des Körpers, also $= dx\,.\,dy\,.\,dz$; der Factor von dV unter dem Zeichen $\int$ ist eine Function der neun Differentialquotienten $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}$ etc., die wir bilden müssen, die ich aber vorläufig durch

$$F\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\xi}{\partial y}, \frac{\partial\xi}{\partial z}, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}, \frac{\partial\eta}{\partial z}, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

oder kürzer durch F bezeichnen will. Da $\frac{\partial(\xi + \delta\xi)}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\delta\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial(\xi + \delta\xi)}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\delta\xi}{\partial y}$ etc. ist, so wird:

$$\delta\Omega = \delta \iiint dx\, dy\, dz\, F$$

$$= \iiint dx\, dy\, dz \left\{\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial x}} \frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial x}} \frac{\partial\delta\eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial x}} \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\right\}$$

$$+ \iiint dx\, dy\, dz \left\{\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial y}} \frac{\partial\delta\xi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial y}} \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial y}} \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\right\}$$

$$+ \iiint dx\, dy\, dz \left\{\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial z}} \frac{\partial\delta\xi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial z}} \frac{\partial\delta\eta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial z}} \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right\}$$

Das erste der drei Integrale rechter Hand zerlegen wir in drei Theile, und wenden auf jeden derselben den Satz an, der durch die Gleichung

$$\iiint dx\, dy\, dz\, H \frac{\partial G}{\partial x} = -\iiint dx\, dy\, dz\, G \frac{\partial H}{\partial x} \\ - \int df\, H\, G\, \cos(n, x)$$

ausgesprochen wird, indem wir G einmal $=\delta\xi$, dann $=\delta\eta$, dann $=\delta\zeta$ setzen; nehmen wir entsprechende Operationen mit den beiden andern Integralen vor, so finden wir:

$$K\delta\Omega = -K\iiint dx\,dy\,dz\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial z}}\right)\right)\delta\xi\right.$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial z}}\right)\right)\delta\eta$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial z}}\right)\right)\delta\zeta\right\}$$

$$-K\int df.\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial x}}\cos(n,x)+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial y}}\cos(n,y)+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial z}}\cos(n,z)\right)\delta\xi\right.$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial x}}\cos(n,x)+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial y}}\cos(n,y)+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial z}}\cos(n,z)\right)\delta\eta$$

$$\left.+\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial x}}\cos(n,x)+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial y}}\cos(n,y)+\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial z}}\cos(n,z)\right)\delta\zeta\right\}$$

Der Gleichung $\delta P - K\delta\Omega = 0$ zufolge, hat man nun die Coëfficienten von $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ in den Ausdrücken von δP und $K\delta\Omega$ einander gleich zu setzen; man kommt dadurch zu Gleichungen, die mit den Gleichungen 1) und 3) identisch werden, wenn man

$$X_x = -K\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial x}}\qquad X_y = -K\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial y}}\qquad X_z = -K\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\xi}{\partial z}}$$

$$Y_x = -K\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial x}}\qquad Y_y = -K\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial y}}\qquad Y_z = -K\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\eta}{\partial z}}$$

$$Z_x = -K\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial x}}\qquad Z_y = -K\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial y}}\qquad Z_z = -K\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\zeta}{\partial z}}$$

setzt. Es bleibt übrig zu zeigen, dass diese Werthe von X_x, X_y etc. mit den oben aufgestellten übereinstimmen. Wir benützen, um die Function F zu bilden, den in 10) für λ aufgestellten Ausdruck; die Werthe λ_1, λ_2, λ_3 finden wir, wenn wir aus dem Systeme 12) a, b, c

eliminiren, und die Wurzeln der kubischen Gleichung nehmen, die wir dann für λ erhalten. Diese kubische Gleichung ist:

$$o = (L-\lambda)(M-\lambda)(N-\lambda) - (L-\lambda)l^2 - (M-\lambda)m^2 - (N-\lambda)n^2 + 2lmn\,;$$

es ist also:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = L + M + N$$
$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = LM + MN + NL - l^2 - m^2 - n^2$$

und daher:

$$\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2 = L^2 + M^2 + N^2 + 2l^2 + 2m^2 + 2n^2,$$

mithin:

$$F = L^2 + M^2 + N^2 + 2l^2 + 2m^2 + 2n^2 + \theta(L + M + N)^2.$$

Bildet man die fraglichen Differentialquotienten dieses Ausdruckes mit Berücksichtigung der Werthe von L, M, N, l, m, n aus 11), so überzeugt man sich, dass die aus ihnen sich ergebenden Werthe von X_x, X_y etc. identisch mit den oben abgeleiteten sind.

Die Übereinstimmung der Gleichungen 13) mit den Gleichungen 1) und 3), die, wie ich meine, mit denen von St. Venant identisch sind, ist hiernach nachgewiesen; ich glaube aber, dass in Beziehung auf die Anwendungen jene meistens die bequemeren sein werden; ich habe aus ihnen in der genannten Abhandlung die Gleichgewichtsbedingung für eine endlich gekrümmte Platte abgeleitet, und für einen Stab lässt sich dieselbe in ähnlicher Weise entwickeln.